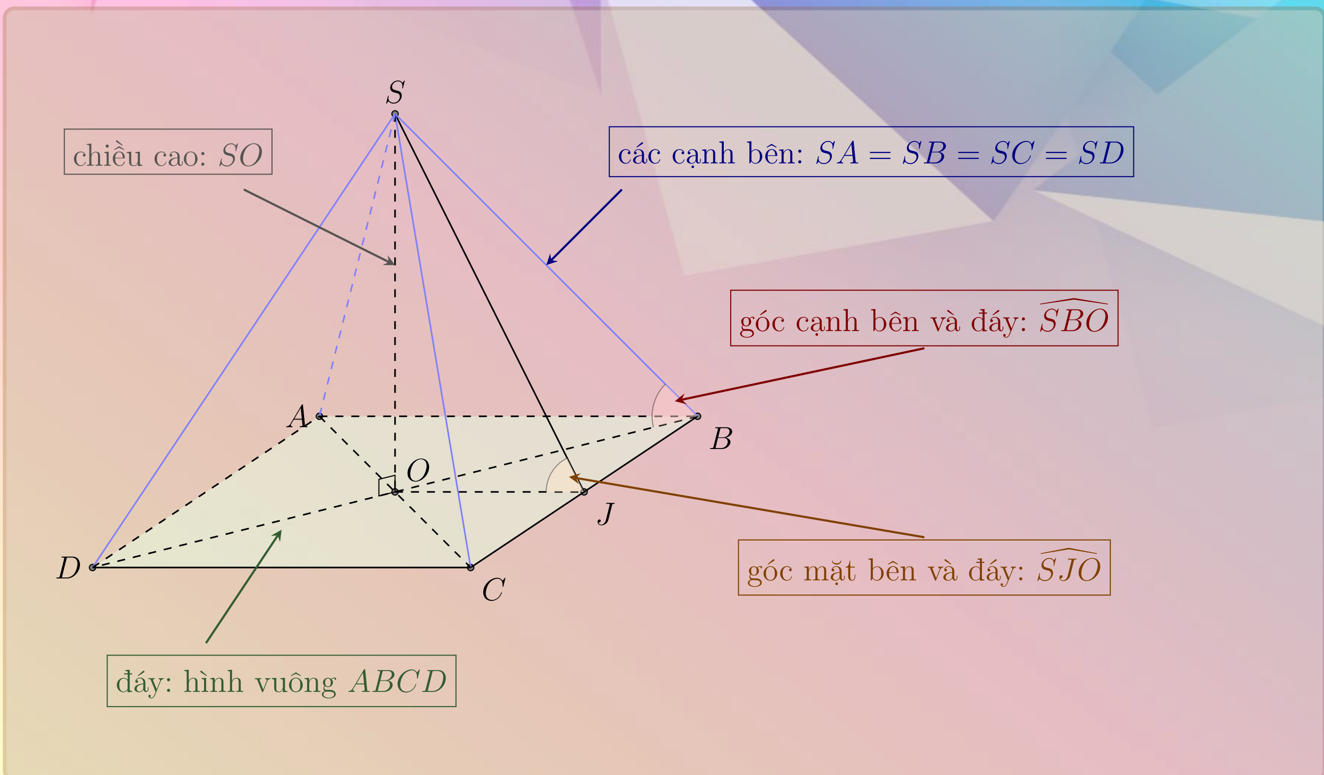
NGUYỄN NGỌC DŨNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH HỌC 11

Chương 3

QUAN HỆ VUÔNG GÓC



2018 - Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 3

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa 1

- Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b nếu góc giữa a và b bằng 90°.
- Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp(α).

2. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:

Định nghĩa 2

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng (α) vuông góc với AB tại trung điểm của AB.

Tính chất 1

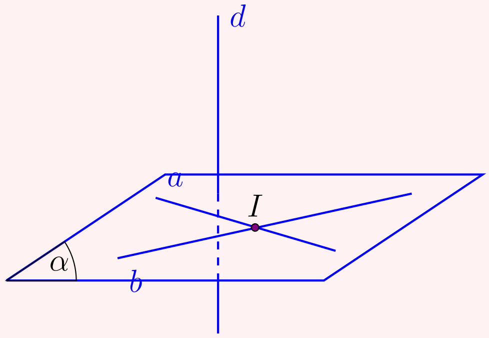
Nếu (α) là mặt phẳng trung trực của AB thì: $\forall M \in (\alpha) \Leftrightarrow MA = MB$.

II. Các dạng toán

Dạng 1: Đường vuông góc đường. Đường vuông góc mặt

① Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

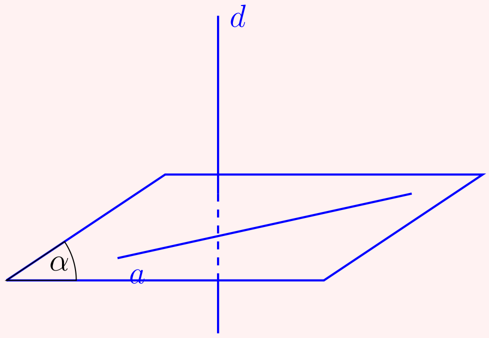
Nếu đường thẳng d vuông góc với ***hai đường thẳng cắt nhau*** nằm trong mp(α) thì đường thẳng a vuông góc với mp(α).



$$\left.\begin{array}{l} d \not\subset (\alpha) \\ d \perp a, b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

② Đường thẳng vuông góc với đường thẳng:

Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d ***vuông góc với tất cả*** các đường thẳng nằm trong (α).



$$\left.\begin{array}{l} d \not\subset (\alpha) \\ d \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp a$$

⚠ ***Lưu ý:*** $$\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ c \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b$$

1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

a) CMR: $BC \perp (SAB)$.

b) CMR: $BD \perp (SAC)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK là các đường cao của ΔSAB và ΔSAC. CMR: $SC \perp (AHK)$.

. . . .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

a) CMR: ΔSDC là tam giác vuông.

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAC. CMR: $AH \perp BD$.

. . . .

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

a) CMR: $BD \perp SC$.

b) Gọi AM, AN là các đường cao của ΔSAB và ΔSAD. CMR: $SC \perp (AMN)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông tại A và $SB \perp (ABC)$.

a) CMR: ΔSAC vuông.

b) Gọi BM và BN là các đường cao của ΔSAB và ΔSAC. CMR: ΔBMN vuông.

Bài 2. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH và AK là các đường cao của ΔSAB và ΔSAC. Đường thẳng HK cắt đường thẳng BC tại I. CMR: ΔAIC là tam giác vuông.

Bài 3. Cho tứ diện $DABC$ có hai mặt bên ABC và DBC là hai tam giác cân có chung đáy BC.

a) CMR: $BC \perp AD$.

b) Gọi I là trung điểm của BC, AH là đường cao của ΔADI. CMR: $AH \perp (BCD)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$.

a) CMR: $SO \perp (ABCD)$.

b) CMR: $AC \perp SD$.

c) Gọi I, K là trung điểm của SB và SD. CMR: $SC \perp IK$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và CD.

a) CMR: $SA = SB = SC = SD$.

b) CMR: $MN \perp SP$.

(Trích đề tuyển sinh cao đẳng - 2009)

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Cho $AB = 2a$, $AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

a) CMR: ΔSDC và ΔSBC là các tam giác vuông.

b) Gọi M, N là trung điểm của SA và SB. CMR: $DCNM$ là hình chữ nhật.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SM \perp (ABCD)$ với M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh các tam giác SAB và SCD vuông.

b) Gọi N là trung điểm CD. Chứng minh: $AN \perp (SMB)$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$. Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là H nằm trên cạnh AC và $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của ΔSAC. Chứng minh: M là trung điểm SA.

(Trích đề tuyển sinh đại học khối D - 2010)

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại trung điểm H của cạnh AD.

a) Chứng minh ΔSCD là một tam giác vuông.

b) Gọi M, K là trung điểm của các cạnh BC và SA. Chứng minh $(SCD) \parallel (HKM)$.

c) Mặt phẳng (HKM) cắt SB tại N. Chứng minh tứ giác $HKMN$ là một hình thang vuông.

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt SBC và ABC là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC.

a) Chứng minh $BC \perp SA$.

b) Gọi M là trung điểm của BC và AH là đường cao của ΔSAM. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với $(ABCD)$.

a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAC. Chứng minh $BD \perp AH$.

c) Gọi M là điểm đối xứng của A qua B. Chứng minh ΔSCM vuông.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với $(ABCD)$.

a) CMR: ΔSBC và ΔSDC là tam giác vuông.

b) Chứng minh $DB \perp SC$.

c) Gọi AH và AK là các đường cao của ΔSAB và ΔSAD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Bài 13. Cho tứ diện $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B và SA vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh ΔAHC là tam giác vuông.

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, với H là trung điểm của AB.

a) Chứng minh AD vuông góc với SB.

b) Gọi K là trung điểm của BC. Chứng minh BD vuông góc với mặt phẳng (SHK).

c) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác SCD và tam giác ACD. Chứng minh GG' song song với mặt phẳng (SAD).

3. Bài tập nâng cao

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau - Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O; SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$; $BD \perp (SAC)$.

b) Chứng minh AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AK, AI đồng phẳng

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.

Bài 3. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Chứng minh:

a) $BC \perp (OAH)$.

b) H là trực tâm ΔABC.

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d) Các góc của ΔABC đều nhọn

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SCD là tam giác vuông tại S. Gọi I, J là trung điểm AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.

b) Gọi H là hình chiếu của S trên IJ. Chứng minh $SH \perp AC$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. ΔSAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm AB và AD.

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Giao tuyến vuông góc (dạng 4):

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB; (α) là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB. Đặt $x = AM$ $(0 < x < a)$.

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Bài 7. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện.

Bài 8. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông cân đỉnh B, $AB = a$. $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm tùy ý trên cạnh AB, đặt $AM = x$, $(0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α).

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Bài 9. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

a) (α) qua S và vuông góc với BC.

b) (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của ΔSBC.

c) (α) qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB.

4. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AC \perp (SAB)$. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $AB \perp (SBC)$. **D.** $AC \perp (SBC)$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $CM \perp (ABD)$. **B.** $AB \perp (MCD)$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DM \perp (ABC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $CD \perp (SAD)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $BC \perp (SAM)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $AC \perp (SBC)$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AC \perp (SCD)$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp SB$. **B.** $CD \perp SD$. **C.** $BD \perp SC$. **D.** $SA \perp AB$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SC = SD$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $CD \perp (SAD)$. **D.** $SA \perp (ABCD)$.

Câu 8. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

D. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song với nhau thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

Câu 9. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song với nhau thì chéo nhau.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (α).

B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (α) thì a song song hoặc thuộc mặt phẳng (α).

C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (α) thì a vuông góc với b.

D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Câu 11. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Mặt phẳng (α) và đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng d thì (α) song song với a.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 13. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 14. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

C. Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b mà b vuông góc với đường thẳng a thì a song song với (α).

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

Câu 15. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

D. Cho hai đường thẳng song song với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 16. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α), trong đó $a \perp (\alpha)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $b \perp (\alpha)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (\alpha)$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Câu 17. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$..

C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Câu 18. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

B. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $a \parallel b$ thì $b \parallel (\alpha)$.

C. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

D. Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \perp a$.

Câu 19. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng chứa một đường thẳng cho trước và vuông góc với một đường thẳng khác cũng cho trước.

Câu 20. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α).

D. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α).

Câu 21. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với một mặt phẳng cho trước.

D. Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 22. Trong không gian, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Điều kiện nào sau đây **không** đủ để suy ra rằng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)?

A. d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

B. d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

C. d vuông góc với vô số đường thẳng nằm trong (P).

D. d vuông góc với các cạnh của một tam giác có 3 đỉnh đều thuộc (P).

Câu 23. Trong không gian, cho các đường thẳng d, d_1, d_2, trong đó, hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Nếu d vuông góc với một trong hai đường thẳng d_1, d_2 thì d vuông góc với (P).

B. Nếu d vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2 thì d vuông góc với (P).

C. Nếu d vuông góc với (P) thì d vuông góc với cả hai đường thẳng d_1, d_2.

D. Nếu d vuông góc với (P) thì d vuông góc với ít nhất một trong hai đường thẳng d_1, d_2.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (SAB). **B.** (SAD). **C.** (SAC). **D.** (SCD).

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (SAB). **B.** (SAC). **C.** (SAD). **D.** (SCD).

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (AHK). **B.** (AHD). **C.** (AKB). **D.** (SBD).

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC bằng nhau. Hỏi trong các mặt phẳng trung trực của các đoạn thẳng AB, BC, CA, có bao nhiêu mặt phẳng chứa điểm S?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Khi đó, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là

A. giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác ABC.

B. giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác ABC.

C. giao điểm của các đường trung trực của tam giác ABC.

D. giao điểm của các đường cao của tam giác ABC.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $SO \perp (ABCD)$. **B.** $SA \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Hỏi trong các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Từ A, kẻ $AM \perp SB$ (với $M \in SB$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $SB \perp (MAC)$. **B.** $AM \perp (SAD)$. **C.** $AM \perp (SBD)$. **D.** $AM \perp (SBC)$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở B. Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AH \perp SB$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AB \perp (SAC)$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BD$. **B.** $SC \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $AD \perp SC$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, tam giác SAB vuông tại A và tam giác SCD vuông tại D. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $AC = BD$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $BC \perp AB$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của AB. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAB)$.

C. ΔSDC vuông tại C. **D.** $CE \perp (SDC)$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA = SB = SC$. Xác định hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $H \equiv B$. **B.** $H \equiv A$.

C. H là trung điểm của AC. **D.** H là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sao đây là mệnh đề **sai**?

A. A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

B. B là chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAB).

C. D là chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD).

D. A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (SAB).

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sao đây đúng?

A. O là hình chiếu vuông góc của S lên mp $(ABCD)$.

B. A là chiếu vuông góc của C lên mặt (SAB).

C. Trung điểm của AD là chiếu vuông góc của C lên mp (SAD).

D. O là hình chiếu vuông góc của B lên mp (SAC).

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SC. **B.** AC. **C.** SB. **D.** SD.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. SD. **B.** SC. **C.** SB. **D.** CD.

Câu 44. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi FH là đường cao của tam giác AFD. Đường thẳng FH vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BF. **B.** BE. **C.** EH. **D.** BH.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên cạnh AC. Gọi I là trực tâm của tam giác HBC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng

định sau.

A. $AB \perp CI$. **B.** $SB \perp CI$. **C.** $SC \perp CI$. **D.** $CI \perp (SAB)$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AD, AB, SD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $DN \perp (SAB)$. **B.** $DN \perp KB$. **C.** $DN \perp (SAC)$. **D.** $DN \perp KC$.

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ và tam giác BCD là tam giác nhọn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD). Khi đó, điểm H là

A. trọng tâm tam giác ABC.

B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

D. trực tâm tam giác ABC.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ trùng với điểm A. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $AC \perp (SBD)$. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $BC \perp SC$. **D.** $AC \perp SC$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $HK \perp AC$. **B.** $HK \perp BC$. **C.** $AK \perp CH$. **D.** $AK \perp SB$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IO \perp (ABCD)$. **B.** $BC \perp (SBA)$.

C. $AC \perp (BID)$. **D.** Tam giác SCD vuông cân ở D.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của SC, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IO \perp (ABCD)$. **B.** $IF \parallel AB$. **C.** $IF \perp (SAD)$. **D.** $FO \perp (ABCD)$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của SC, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IF \parallel AB$. **B.** $(FIO) \parallel (SAB)$.

C. $SD \perp (FAB)$. **D.** Tam giác IFO vuông tại I.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của SC, BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $IF \parallel (SAD)$. **B.** $SA \parallel IF$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $IO \perp (ABCD)$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của SC, SB, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tam giác IFE đều.
B. $IO \perp (ABCD)$.
C. $FE \perp (SAC)$.
D. $SA \perp (IFE)$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và SO vuông góc với đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SO \perp MN$.
B. $MP \perp QN$.
C. $SO \perp (MNPQ)$.
D. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB là tam giác đều và hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AB. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BD \parallel (SIF)$.
B. $CF \perp (SIF)$.
C. $CF \perp (SID)$.
D. $AC \perp SF$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB là tam giác đều và hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AB. Gọi I, F, J lần lượt là trung điểm của AB, AD và SA. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SI \perp CD$.
B. $CF \perp (SID)$.
C. $AC \perp (IFJ)$.
D. Tam giác SIF vuông tại I.

Câu 58. Trong một tứ diện, có tối đa bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $AB = a, AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$. Biết rằng $SO \perp (ABCD)$ và $SB = a$, khẳng định nào sau đây về tam giác SAC là đúng?

A. Tam giác SAC vuông, không cân.
B. Tam giác SAC cân, không vuông.
C. Tam giác SAC vuông cân.
D. Tam giác SAC đều.

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi d_1 là đường thẳng qua S và vuông góc với $(ABCD)$, d_2 là giao tuyến của các mặt mặt phẳng (SAB) và (SCD), d_3 là giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (SBC). Xét 3 mệnh đề sau

(I) $d_1 \perp \text{mp}(d_2, d_3)$,

(II) $d_2 \perp \text{mp}(d_3, d_1)$,

(III) $d_3 \perp \text{mp}(d_1, d_2)$.

Hỏi trong các mệnh đề $(I), (II), (III)$, có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A lên DI. Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ABC).
B. (BCD).
C. (CDA).
D. (DAB).

Câu 62. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có hình chiếu của A' lên mặt ABC là trực tâm của tam giác ABC. Hỏi trong các mặt bên của hình lăng trụ, có tối đa bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BD \perp SC$.

B. $IO \perp (ABCD)$.

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

D. $AC \perp (SBD)$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang vuông. **B.** Hình thang cân.

C. Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $HK \perp (SBC)$.

C. $BC \perp (SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (BCD)$. **B.** $BC \perp AD$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $AC \perp BD$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $AH \perp SB$. **B.** $HK \perp AM$. **C.** $AK \perp SD$. **D.** $AK \perp HK$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và E là trung điểm của SD. Trong (ACE), kẻ $OF \parallel AE$, $F \in CE$. Trên cạnh SD lấy điểm M bất kỳ. Gọi K là hình chiếu của O trên CM. Tìm quỹ tích của K.

A. Đường thẳng qua F và song song với SD.

B. Đường thẳng qua F và song song với SO.

C. Đường tròn đường kính EF.

D. Đường tròn đường kính CF.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy là $AB = 2a, CD = a$, các cạnh $AD = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi trong các tam giác SAB, SAC, SAD, SBC, SBD, SCD, có tất cả bao nhiêu tam giác vuông?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cắt hình chóp bởi mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, ta được thiết diện là

A. một hình chữ nhật.

B. một hình vuông.

C. một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau.

D. một hình thoi.

Câu 72. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác nhọn, hình chiếu của A' lên mặt ABC là trực tâm của tam giác ABC. Hỏi trong các mặt bên của hình lăng trụ, có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, hình chiếu của S lên mặt đáy nằm trên BD và $SB = AB$. Khẳng định nào sau đây về tam giác SAC là chắc chắn đúng?

A. Tam giác SAC vuông. **B.** Tam giác SAC cân.

C. Tam giác SAC vuông cân. **D.** Tam giác SAC đều.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SC và (P) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng SA. Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) với khối chóp bằng mấy lần diện tích đáy?

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. B	5. C	6. C	7. B	8. A	9. A	10.A	11.D	12.B	13.D
14.A	15.B	16.D	17.B	18.D	19.A	20.B	21.B	22.C	23.A	24.D	25.C	26.A
27.A	28.D	29.D	30.A	31.D	32.D	33.C	34.D	35.C	36.D	37.B	38.A	39.C
40.D	41.D	42.C	43.B	44.D	45.B	46.D	47.D	48.C	49.D	50.D	51.D	52.C
53.D	54.A	55.D	56.B	57.C	58.D	59.C	60.D	61.B	62.D	63.D	64.A	65.C
		66.D	67.B	68.D	69.D	70.C	71.C	72.B	73.C	74.C		

Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

✲ Xác định $\widehat{[AB,(P)]}$?

Ta có:

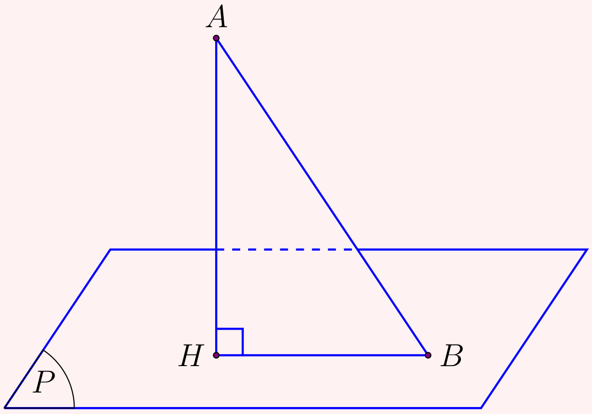
$A\boxed{H} \perp (P)$.

$\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của A trên (P) là $\boxed{H}$.

Hình chiếu vuông góc của B trên (P) là B.

Suy ra hình chiếu vuông góc của AB trên (P) là HB.

$\Rightarrow \widehat{[AB,(P)]} = \widehat{(AB,HB)} = \widehat{ABH}$.



⚠ *Nếu $d \perp (P)$ thì $\widehat{[d,(P)]} = 90^\circ$.*

1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính $\widehat{SB,(ABCD)} = ?$ b) Tính $\widehat{SC,(SAB)} = ?$ c) Tính $\widehat{SD,(SAC)} = ?$

. . . .

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại B, DA vuông góc với (ABC), $AB = BC = a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa BD với các mặt phẳng (ABC) và (DAC).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa SC với mặt phẳng (SBA).

c) Tính góc giữa SC với mặt phẳng (SBD).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và có cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy và $SO = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa SA với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa SO với mặt phẳng (SBC).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm AB.

a) Chứng minh SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa SC với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là một hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{6}$.

a) CMR: $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC).

3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O; $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và $(ABCD)$.

b) SB và (SAC).

c) SC và (SAB).

d) AC và (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh $SC = a$, hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên (SAB) góc β. Tính SA và AB.

4. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và hình chiếu của (a) trên (P).

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song.

C. Nếu góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Nếu góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và (SAD) là góc nào trong các phương án dưới đây?

A. $\widehat{BSA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{BSD}$. **D.** $\widehat{SBD}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$. **B.** Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa CD và (ABC) là góc $\widehat{DBC}$. **D.** Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và (SBD) là

A. $\widehat{SAB}$. **B.** $\widehat{ASB}$. **C.** $\widehat{ASO}$. **D.** $\widehat{ASD}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và (SAB) là

A. $\widehat{CSA}$. **B.** $\widehat{CSB}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{SCB}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. H là trọng tâm tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng a và tạo với đáy một góc $60°$. Tính chu vi đáy P của hình chóp đó.

A. $P = 3a$. **B.** $P = \dfrac{3a}{2}$. **C.** $P = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $P = 3a\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và $(A_1B_1C_1D_1)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = 1$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông với cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Góc giữa BD và (SAC) là 90°. **B.** Góc giữa BD và (SAB) là $\widehat{DBA}$.

C. Góc giữa BD và (IJK) là 60°. **D.** Góc giữa BD và (SAD) là $\widehat{BDA}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác (ABC) không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Số đo góc giữa HK và (SBC) là

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 120°.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = 1$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB). Khi đó, $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết $AB = a$, góc giữa MN và mặt phẳng đáy bằng 45°. Tính SO.

A. $SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $SO = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm tam giác ABC và SBC. Tính số đo góc α giữa SC và (BHK).

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 90^\circ$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$ và góc giữa SD và (SAC) bằng 30°. Tính diện tích S của hình thoi.

A. $S = a^2$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{5}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Kẻ SM, SN lần lượt vuông góc với SB, SD tại M, N. Tính góc giữa AC và (AMN).

A. 15°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB và tam giác SAD là các tam giác vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm SD, (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Tính $\sin\alpha$ của góc giữa CM và (α).

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BD. Tính giá trị $\sin\alpha$ của góc giữa SD và (SAM).

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Tính giá trị $\sin\varphi$ của góc giữa SN và mặt phẳng (SCM).

A. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\sin\varphi = \frac{3}{2}$. **D.** $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB. Tính giá trị $\sin\varphi$ của góc giữa SD và (SBC).

A. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Kẻ $AP \perp SB$, $AQ \perp SD$ lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của SD. Tính giá trị cosinφ của góc giữa CM và (APQ).

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 26. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không nằm trong (P). Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Đường thẳng a nằm trong (P) và $a \perp d$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

A. $a \parallel d'$. **B.** $a \perp d'$.

C. Hai đường thẳng a và d đồng phẳng. **D.** Hai đường thẳng a và d' trùng nhau.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Xác định hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB).

A. SB. **B.** SA. **C.** AC. **D.** BC.

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định hình chiếu vuông góc của AC' lên trên mặt phẳng $(AA'D'D)$.

A. AA'. **B.** AD. **C.** AC. **D.** AD'.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sao đây là mệnh đề **sai**?

A. SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB).

B. SO là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SBD).

C. SD là chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAD).

D. AC là chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. C	5. C	6. B	7. B	8. C	9. D	10.D	11.D	12.D	13.C
14.B	15.B	16.C	17.A	18.D	19.C	20.C	21.C	22.D	23.D	24.D	26.B	27.A
28.D	29.B											

§2. Hai mặt phẳng vuông góc

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa 1

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

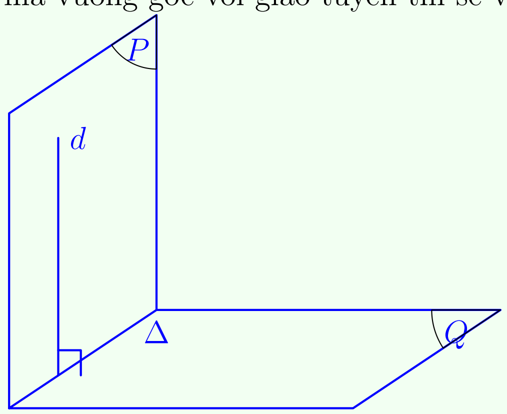
Định nghĩa 2

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông. Kí hiệu: $(P) \perp (Q)$.

2. Các định lý quan trọng

Định lý 1

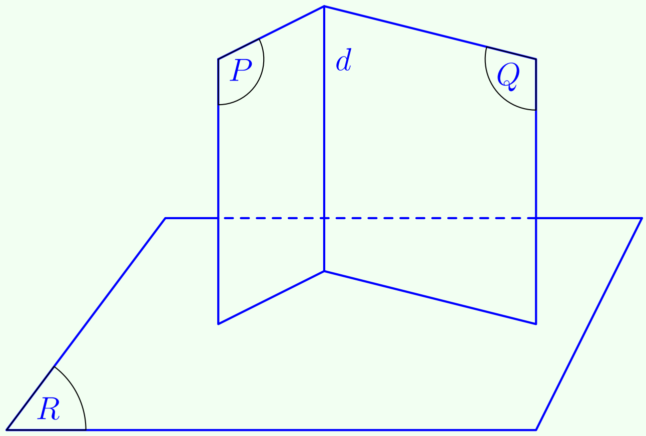
Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q)\\(P) \cap (Q) = \Delta\\d \subset (P)\\d \perp \Delta\end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (Q)$$

Định lý 2

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



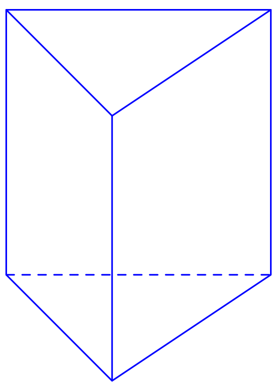
$$\left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=d\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp(R)$$

3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

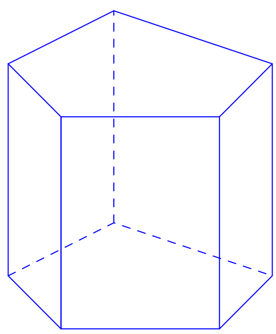
Định nghĩa 3

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

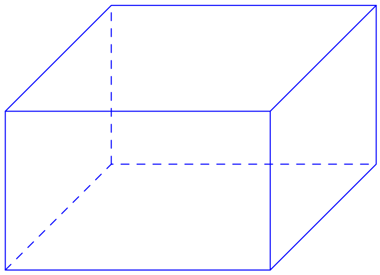
- Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, v.v ...được gọi là *hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, v.v ...*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là *hình lăng trụ đều.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy và các mặt bên là hình vuông được gọi là *hình lập phương.*



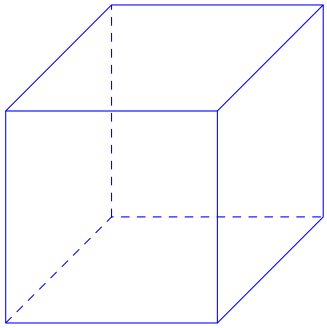
Hình lăng trụ đứng tam giác



Hình lăng trụ đứng ngũ giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

Tính chất 1

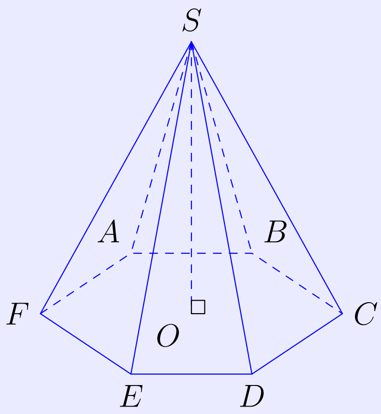
Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa 4

Hình chóp đều là hình chóp có ***đáy là đa giác đều*** và ***các cạnh bên bằng nhau***.

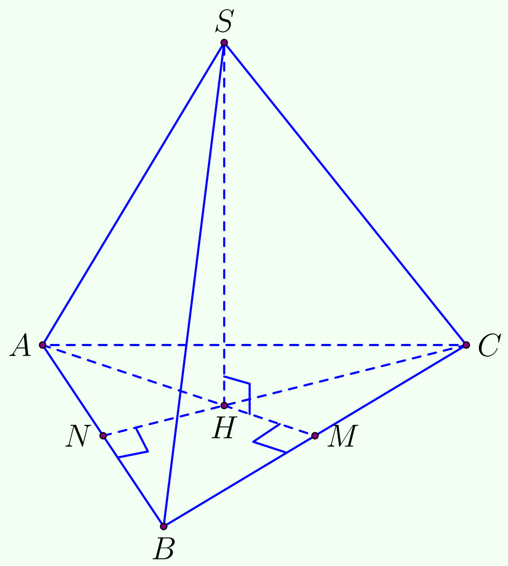
- $ABCDEF$ là đa giác đều.
- $SA = SB = SC = SD = SE = SF$.



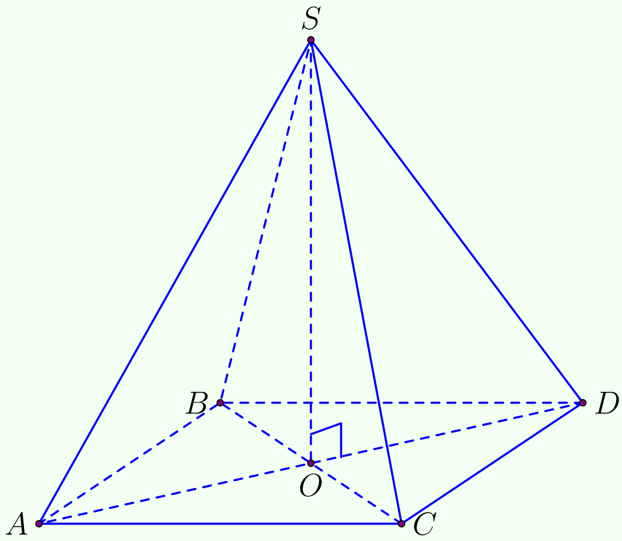
Tính chất 2

Trong hình chóp đều:

- Đường thẳng kẻ từ đỉnh và vuông góc với đáy gọi là đường cao.
- Đường cao đi qua tâm của đáy (tâm của đa giác đều là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác đáy).
- Các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.
- Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



Hình chóp tam giác đều (đáy là tam giác đều)



Hình chóp tứ giác đều (đáy là hình vuông)

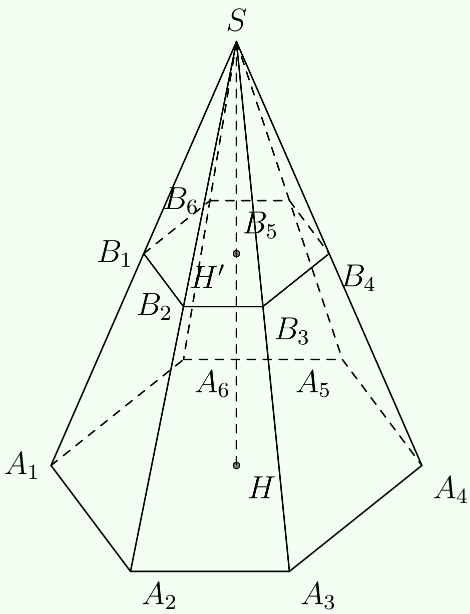
⚠ ***Tứ diện đều là hình chóp tam giác có bốn mặt là tam giác đều (hay là hình chóp tam giác đều có các mặt bên cũng là tam giác đều).***

Định nghĩa 5

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là ***hình chóp cụt đều***.

Tính chất 3

- Hình $A_1A_2A_3A_4A_5A_6.B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ là một hình chóp cụt đều.
- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.
- Các mặt bên là những hình thang cân và độ dài các cạnh bên bằng nhau.



5. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác

Định nghĩa 6

Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó được gọi là trục của tam giác.

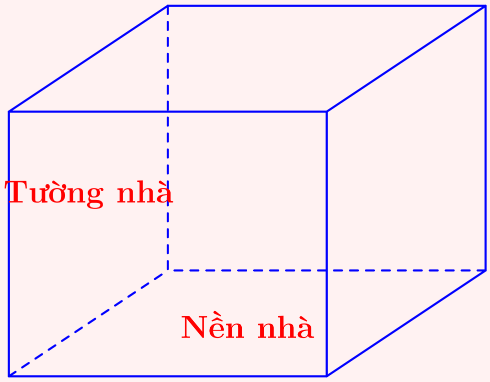
Tính chất 4

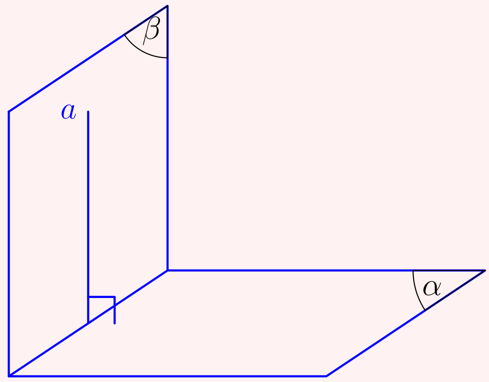
Các điểm nằm trên trục của tam giác thì cách đều các đỉnh của tam giác đó.

II. Các dạng toán

Dạng 1: Hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh ***mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia***.





$$\left.\begin{array}{l} a \subset (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

⇛ *Thực chất, để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc ta thực hiện việc chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đã học ở bài trước.*

✍ *Lưu ý quan trọng: KHÔNG có tính chất nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào trong mặt phẳng này ĐỀU VUÔNG GÓC với mặt phẳng kia.*

1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

. . . .

. . . .

Ví dụ 2

Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK là các đường cao của ΔSAB và ΔSAC. Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $SA = SB = SC = SD$.

a) Chứng minh $(ABCD) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, biết $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. CMR: $(SAC) \perp (SMB)$.

(Trích đề tuyển sinh đại học khối B - 2006)

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và $(SAB) \perp (ABCD)$ và ΔSAB là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Chứng minh $SM \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh ΔSBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh: $AM \perp BP$.

(Trích đề tuyển sinh đại học khối A - 2007)

Bài 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh: $SC \perp (ABH)$.

(Trích đề tuyển sinh đại học khối B - 2012)

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và mặt đáy $ABCD$ là một hình thang vuông tại A và B. Biết $AB = BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm của AD.

a) CMR: tam giác SBC là một tam giác vuông.

b) CMR: $BM \parallel (SCD)$.

c) CMR: $(SBM) \perp (SAC)$.

3. Bài tập nâng cao

Trục đường tròn và ứng dụng:

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90°$, $\widehat{BSC} = 60°$, $\widehat{ASC} = 120°$. Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh $SI \perp (ABC)$ và tính khoảng cách từ S đến (ABC).

Bài 2. Cho ΔABC cân đỉnh A có góc $\widehat{A} = 120°$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC. Chứng minh $OA \perp (SBC)$. Tính khoảng OA.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{B} = 60°$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Biết $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ S đến AB.

Mặt phẳng vuông góc. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. ΔSAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm AB.

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh ΔSAD và ΔSBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$, $(SBC) \perp (SAB)$.

d) Tính góc giữa (SAD) và (SBC).

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với đáy (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD; đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh: $AB \perp (BCD)$.

b) Chứng minh: $(ABE) \perp (ADC)$, $(DFK) \perp (ADC)$. c. Gọi O và H lần lượt là trực tâm ΔBCD và ΔACD. Chứng minh $OH \perp (ADC)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Tính góc giữa (SAD) và (SCD).

c) Gọi BE và DF là đường cao của $\Delta\Delta SBD$. Chứng minh: $(ACF) \perp (SBC)$; $(AEF) \perp (SAC)$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}; DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh $(SAM) \perp (SMN)$.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh: $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và $\Delta AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK).

4. Bài tập trắc nghiệm

A. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không nằm trong (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4. Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

B. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

D. Nếu $c \parallel m$ thì $c \parallel (\alpha)$ hoặc $c \parallel (\beta)$.

Câu 5. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và điểm M. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P).

B. Có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

D. Không có mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 7. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 9. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

B. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không nằm trong (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì $a \parallel (P)$.

Câu 11. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song nhau.

D. Đường thẳng a và mặt phẳng (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì a song song với b.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 13. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), a là một đường thẳng nằm trên (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a \parallel b$ với $b = (P) \cap (Q)$ thì $a \parallel (Q)$.

B. Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $a \perp (Q)$.

C. Nếu a cắt (Q) thì (P) cắt (Q).

D. Nếu $(P) \parallel (Q)$ thì $a \parallel (Q)$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 15. Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

C. Cho $a \perp b$ và b nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

D. Cho $a \parallel b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn chứa một đường thẳng cố định.

D. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 17. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \subset (P), b \subset (Q)$ và $a \perp b$ thì $(P) \perp (Q)$.

B. Nếu $a \subset (P), b \subset (Q)$ và $(P) \perp (Q)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \perp (Q)$.

D. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp (Q)$ thì $(P) \perp (Q)$.

B. Bài tập về quan hệ vuông góc

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong các mặt phẳng chứa các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Trong số các mặt phẳng chứa mặt bên và mặt đáy của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (SAB)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SAC).

B. Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD).

C. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

D. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (SDC).

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi AH và AK lần lượt là các đường cao của các tam giác SAB và SAC. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây.

A. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAB).

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AHK).

C. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AHC).

D. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (AKB).

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của AD. Trong các điểm sau, điểm nào là chân đường cao của hình chóp?

A. A. **B.** B. **C.** I. **D.** O.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hãy xác định đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ trong những đường sau đây?

A. SA. **B.** SB. **C.** SO. **D.** SC.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Các mặt phẳng (SCI) và (SDI) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. AD vuông góc với (SAB). **B.** BC vuông góc với (SAB).

C. CD vuông góc với (SAB). **D.** IJ vuông góc với (SAB).

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính SO.

A. $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $SO = a\sqrt{2}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

C. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

D. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Câu 27. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Độ dài đường chéo AC' là

A. $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **B.** $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

C. $AC' = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$. **D.** $AC' = \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 28. Độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $2a\sqrt{2}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{5}$. **D.** $4a$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (SAB)$. **B.** $(BIH) \perp (SBC)$. **C.** $(SAC) \perp (SAB)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SAC) \perp (SAB)$. **B.** $(BIH) \perp (SBC)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm AB, N là trung điểm AC, $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SMC)$. **B.** $IA \perp (SBC)$. **C.** $BC \perp (SAI)$. **D.** $AC \perp (SBN)$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm AB, N là trung điểm AC, $(SMC) \perp (ABC)$, $(SBN) \perp (ABC)$, G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SIN) \perp (SMC)$. **B.** $(SAC) \perp (SBN)$. **C.** $(SIM) \perp (SBN)$. **D.** $(SMN) \perp (SAI)$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SCD) \perp (SAD)$. **B.** $(SBC) \perp (SIA)$. **C.** $(SDC) \perp (SAI)$. **D.** $(SBD) \perp (SAC)$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $H \in SC$. **B.** $H \in SB$.

C. H trùng với trọng tâm ΔSBC. **D.** $H \in SI$ (với I là trung điểm của BC).

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $H \in AM$ (M là trung điểm của CD).

B. $(ABH) \perp (ACD)$.

C. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD.

D. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy, H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SIC) \perp (SCD)$. **B.** $(SCD) \perp (AKC)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(AHB) \perp (SCD)$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (SIA)$. **B.** $(SBD) \perp (SAC)$. **C.** $(SDC) \perp (SAI)$. **D.** $(SCD) \perp (SAD)$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Trong số các mặt phẳng chứa mặt đáy và các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (SAB).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với $(ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, hãy cho biết mệnh đề nào **đúng**.

A. (SAC) vuông góc với (SBD). **B.** (SBD) vuông góc với $(ABCD)$.

C. $(ABCD)$ vuông góc với (SAB). **D.** (SAB) vuông góc với (SAD).

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và tam giác BCD vuông tại B. Trong các cặp mặt phẳng sau, cặp nào vuông góc với nhau?

A. (ABC) và (ABD). **B.** (ABD) và (BCD).

C. (BCD) và (ACD). **D.** (ACD) và (ABC).

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại B. Mặt phẳng (ABC) vuông góc với (BCD). Trong các cạnh của tứ diện đã cho, cạnh nào là đường cao?

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** BD.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3a$, $BC = 4a$. Biết $SA \perp (ABC)$ và góc giữa (SBC) và (ABC) bằng $60°$, tính diện tích của tam giác SBC.

A. $12a^2$. **B.** $18a^2$. **C.** $3a^2\sqrt{3}$. **D.** $6a^2$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. $SA \perp (ABC)$, mặt phẳng SBC tạo với đáy (ABC) góc $30°$. Tính diện tích của tam giác SBC.

A. a^2. **B.** $\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$. Biết diện tích tam giác SBD bằng a^2. Tính SA.

A. $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $SA = \dfrac{a}{2}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là hình chiếu của A lên BC. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. góc $\widehat{SBA}$. **B.** góc $\widehat{SJA}$. **C.** góc $\widehat{SMA}$. **D.** góc $\widehat{SCA}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $(SAB) \perp (ABC)$, $SA = SB = AC$, I là trung điểm AB. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC). Tính α.

A. $\alpha = 30°$. **B.** $\alpha = 60°$. **C.** $\alpha = 90°$. **D.** $\alpha = 45°$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. góc $\widehat{SBA}$. **B.** góc $\widehat{SJA}$. **C.** góc $\widehat{SCA}$. **D.** góc $\widehat{SMA}$.

Câu 48. Cho tứ diện $S.ABC$ có $(SBC) \perp (ABC)$. SBC là tam giác đều cạnh a. ABC là tam giác vuông tại A và $\widehat{ABC} = 30°$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\tan\varphi = 3\sqrt{3}$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$.

Câu 49. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tính $\tan\varphi$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Trong các cặp mặt phẳng sau đây, cặp mặt phẳng nào **không** vuông góc với nhau?

A. (SAD) và (SAB). **B.** (SCI) và (SDJ). **C.** (SAC) và (SBD). **D.** (SAB) và (SBC).

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SB < SD$. SAB và SBC là hai tam giác cân có chung cạnh đáy SB. Gọi M là trung điểm SB. Trong các cặp mặt phẳng sau, cặp nào **không** vuông góc với nhau?

A. (SAB) và (MAC). **B.** (SAC) và (SBD).
C. (SBD) và $(ABCD)$. **D.** $(ABCD)$ và (SAC).

Câu 52. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi. Ba cạnh xuất phát từ A tạo với nhau góc 60° theo từng đôi. Trong các cặp mặt phẳng sau đây, cặp nào vuông góc với nhau?

A. $(ABCD)$ và $(ABB'A')$. **B.** $(ABB'A')$ và $(ADC'B')$.
C. $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$. **D.** $(BCD'A')$ và $(A'B'C'D')$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = AD = 2DC = 2a$. Gọi I là trung điểm AD. Các mặt phẳng (SIC) và (SIB) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $3a^2$. **B.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^2}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = 3a$ và $DC = a$. Gọi I là điểm thuộc đoạn AD sao cho $IA = 2ID$. Biết $SI \perp (ABCD)$ và góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°, tính chiều cao của tam giác SBC.

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $a\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{4a\sqrt{30}}{15}$.

Câu 55. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc?

A. $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x = \dfrac{a}{3}$.

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính độ dài đường cao SH của hình chóp.

A. $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. Bài tập về hình chóp đều, lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Câu 57. Cho hình lăng trụ đứng ngũ giác $(\mathscr{H})$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các cạnh bên của $(\mathscr{H})$ song song với nhau.
B. Các mặt bên của $(\mathscr{H})$ song song với nhau.
C. Hai mặt đáy của $(\mathscr{H})$ song song với nhau.
D. Các cạnh bên của $(\mathscr{H})$ bằng nhau.

Câu 58. Cho các mệnh đề sau:

(1) Hình hộp là hình lăng trụ đứng.

(2) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

(3) Hình lăng trụ là hình hộp.

(4) Hình lăng trụ đứng là hình hộp chữ nhật.

Số mệnh đề **sai** là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 59. Các mặt bên của hình chóp cụt đều là hình gì?

A. Hình thang cân. **B.** Hình tam giác cân.

C. Hình vuông. **D.** Hình tam giác đều.

Câu 60. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

D. Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Câu 61. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

B. Phần của hình chóp nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

C. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt.

D. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện không song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Câu 62. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SA. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Câu 63. Tính độ dài d của đường chéo của hình hộp chữ nhật khi biết độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c.

A. $d = \sqrt{a+b+c}$. **B.** $d = a+b+c$.

C. $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $d = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Câu 64. Tính chiều cao h của hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $h = a\sqrt{2}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{1}{2}a$. **D.** $h = 2a$.

Câu 65. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α, β, γ là 3 góc tạo bởi đường chéo AC' với 3 cạnh chung đỉnh A. Tính $A = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

A. $A = 1$. **B.** $A = 3\sqrt{3}$. **C.** $A = 2$. **D.** $A = 0$.

Câu 66. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Tính diện tích S của tứ giác $AB'C'D'$.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $S = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 67. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm CD. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và AM. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính diện tích S của thiết diện tạo thành khi cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = a^2$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 69. Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của hình lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tan của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 71. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 72. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AH của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AH. Đặt $AM = x$. Tìm x để diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $x = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 73. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a. Điểm M thuộc đoạn AB' sao cho $\frac{MA}{MB'} = \frac{5}{4}$. Một mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với các đường thẳng $A'C$ và BC' cắt đường thẳng CC' tại C_1. Tính tỉ số $\frac{C_1C'}{CC'}$.

A. $\frac{C_1C'}{CC'} = \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{C_1C'}{CC'} = \frac{4}{9}$. **C.** $\frac{C_1C'}{CC'} = \frac{5}{9}$. **D.** $\frac{C_1C'}{CC'} = \frac{1}{3}$.

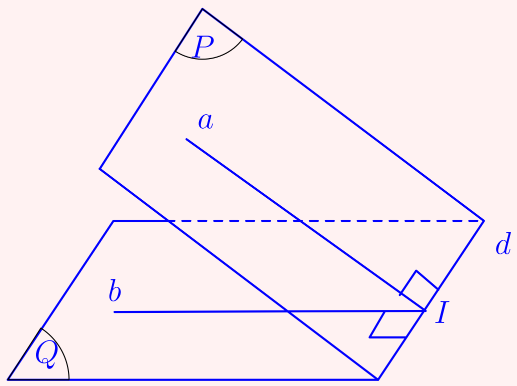
Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'. Tính diện tích S của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFM).

A. $S = \frac{7a^2\sqrt{11}}{8}$. **B.** $S = \frac{7a^2\sqrt{11}}{24}$. **C.** $S = \frac{77a^2}{72}$. **D.** $S = \frac{7a^2}{8}$.

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. C	4. C	5. C	6. B	7. B	8. D	9. B	10.D	11.B	12.B	13.B
14.C	15.C	16.C	17.D	18.C	19.B	20.A	21.D	22.C	23.C	24.C	25.C	26.D
27.A	28.B	29.C	30.D	31.C	32.D	33.A	34.D	35.D	36.C	37.B	38.C	39.A
40.C	41.D	42.A	43.B	44.C	45.B	46.D	47.D	48.B	49.B	50.C	51.D	52.C
53.A	54.B	55.A	56.C	57.B	58.C	59.A	60.D	61.A	62.B	63.C	64.B	65.C
		66.B	67.D	68.D	69.A	70.D	71.A	72.B	73.D	74.B		

Dạng 2: Góc giữa hai mặt phẳng



$$\begin{cases} (P)\cap(Q)=d \\ a\subset(P), a\perp d \\ b\subset(Q), b\perp d \end{cases} \Rightarrow \widehat{[(P),(Q)]}=\widehat{(a,b)}$$

⚠ ***Chú ý quan trọng:***

1. *Nếu $(P)\perp(Q)$ thì kết luận ngay $\widehat{[(P),(Q)]}=90^\circ$.*

2. *Khi giải bài tập, không phải lúc nào a,b cũng có sẵn trong hình hoặc a,b khó xác định. Khi đó, ta có một phương pháp để tìm a,b như sau:*

- *B1: Xác định $d=(P)\cap(Q)$;*
- *B2: Tìm mặt phẳng (R) vuông góc với d;*
- *B3: Xác định: $a=(R)\cap(P)$, $b=(R)\cap(Q)$.*

(a,b chính là hai đường thẳng cần tìm)

1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh: $SA\perp(ABC)$.

b) Chứng minh: $BC\perp(SAB)$.

c) Tính: $\widehat{[(ABC),(SBC)]}=?$

d) Tính: $[\widehat{(SAB),(SBC)}] = ?$

e) Tính: $[\widehat{(SAC),(SBC)}] = ?$

....

....

....

....

....

....

....

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông tại B và SA vuông góc với (ABC). Biết $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc của hai mặt phẳng $SAB)$ và (SAC).

b) Tính góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

c) Tính góc của hai mặt phẳng (SBC) và (SAC).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với đáy và $SO = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) vuông góc với $(ABCD)$ và SAD là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh SM vuông góc với $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SB.

a) Tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa $(DCMN)$ và $(ABCD)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau đây:

a) (SBC) và (ABC) . b) (SBD) và (ABD). c) (SAB) và (SCD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm AB và AC. Tính góc giữa các mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBC). b) (SEF) và (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các mặt phẳng

a) (SAD) và (SBC). b) (SBC) và (SCD).

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC vuông cân với $AB = AC = a$; ΔDBC đều. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng $30°$.

a) Tính AD và khoảng cách từ A đến (BCD).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD); Góc giữa (ADC) và (ADB).

4. Bài tập trắc nghiệm

A. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

C. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tuỳ ý nằm trong mỗi mặt phẳng.

D. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

Câu 2. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với Δ.
- φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với Δ, lần lượt nằm trên (P) và (Q).
- φ bằng góc giữa hai đường thẳng a và b đồng quy với Δ, cùng vuông góc với Δ, lần lượt nằm trên (P) và (Q).

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3. Cho đường thẳng d cắt và không vuông góc với mặt phẳng (P). Gọi (Q) là mặt phẳng thay đổi nhưng luôn chứa d. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Chỉ tồn tại giá trị lớn nhất mà không tồn tại giá trị nhỏ nhất của φ.

B. Chỉ tồn tại giá trị nhỏ nhất mà không tồn tại giá trị lớn nhất của φ.

C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và cũng không tồn tại giá trị nhỏ nhất φ.

D. Tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của φ.

B. Góc giữa hai mặt phẳng

Câu 4. Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β), biết rằng có các đường thẳng thỏa mãn $d_1 \perp (\alpha)$, $d_2 \perp (\beta)$, $d_3 \parallel (\alpha)$, $d_4 \parallel (\beta)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_3 và d_4. **B.** Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_2.

C. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_4. **D.** Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_2 và d_4.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng góc nào dưới đây?

A. $\widehat{CSA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Câu 6. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 45°. **B.** $49^\circ 6'$. **C.** $40^\circ 53'$. **D.** $62^\circ 14'$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Biết rằng cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 8. Cho tam giác ABC không nằm trong mặt phẳng (P), giả sử góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ, $\varphi \neq 90^\circ$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của ba điểm A, B, C lên mặt phẳng (P). Khi đó, hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{ABC} = S_{A'B'C'}.\cos\varphi$.
B. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$.
C. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\sin\varphi$.
D. $S_{ABC} = S_{A'B'C'}.\sin\varphi$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\varphi$.
B. $S_{ABC} = S_{SBC}.\sin\varphi$.
C. $S_{ABC} = S_{SAB}.\cos\varphi$.
D. $S_{ABC} = S_{SAC}.\cos\varphi$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là

A. $\widehat{AOS}$. **B.** $\widehat{ADS}$. **C.** $\widehat{ABS}$. **D.** $\widehat{BSO}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AB, CD. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào?

A. SA và SD. **B.** SB và SC. **C.** SB và SD. **D.** SI và SJ.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD).

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

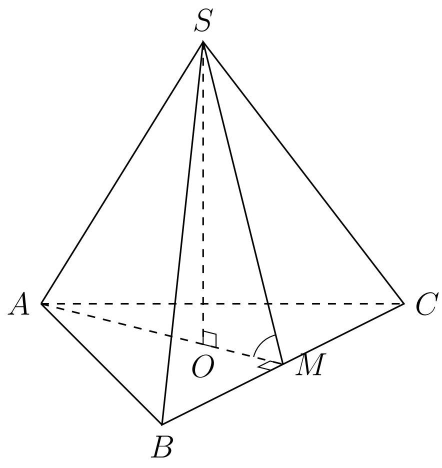
Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh SC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào sau đây?

A. SB và SD. **B.** BH và CH. **C.** CH và DH. **D.** BH và DH.

Câu 16.

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.



Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của chóp.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng $(DA'C')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết rằng $AC = 2a$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $60°$. **B.** $50°46'$. **C.** $39°13'$. **D.** $30°$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh là $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết rằng $BD = 2a$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $47°25'$. **D.** $90°$.

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính góc φ tạo bởi mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

A. $\varphi \approx 54°44'$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi \approx 35°15'$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính góc φ tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\varphi \approx 53°24'$. **C.** $\varphi = 60°$. **D.** $\varphi \approx 64°27'$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, có cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = 60°$. Cạnh bên $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Xác định độ lớn của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 24. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng hai lần cạnh đáy. Tính góc φ giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\varphi \approx 75°2'$. **B.** $\varphi \approx 73°53'$. **C.** $\varphi \approx 75°31'$. **D.** $\varphi \approx 72°14'$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm M của cạnh AB. Giả sử rằng tam giác SAB là tam giác đều, hãy tính góc φ tạo bởi mặt phẳng (SCD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\varphi = 45°$. **B.** $\varphi \approx 49°6'$. **C.** $\varphi \approx 40°53'$. **D.** $60°$.

Câu 26. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng $30°$, biết rằng diện tích xung quanh của hình chóp là 90cm^2 thì diện tích đáy của hình chóp gần bằng với giá trị nào dưới đây nhất?

A. 77cm^2. **B.** 72cm^2. **C.** 75cm^2. **D.** 78cm^2.

Câu 27. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC).

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 28. Cho hình chóp $SABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = BC = 2a$, $A'B = 4a$. Tính góc φ tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$.

A. $\varphi = 30°$. **B.** $\varphi = 45°$. **C.** $\varphi \approx 53°35'$. **D.** $\varphi = 60°$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính độ lớn góc φ tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\varphi \approx 54°23'$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi \approx 63°26'$.

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của AA'. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (MBD) gần bằng góc nào dưới đây nhất?

A. $35°$. **B.** $42°$. **C.** $50°$. **D.** $60°$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tang góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α và $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α và $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SA, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = a$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 3a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = a$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (DBC) bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = a\sqrt{2}$, $AD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và các cạnh còn lại bằng a. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 3a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}, AD = a$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABD) bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $\varphi \quad (0° < \varphi < 90°)$. Tính tang của góc α giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ.

A. $\tan\alpha = \tan\varphi$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\varphi$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}.\tan\varphi$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}\tan\varphi$.

Câu 39. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 4AB = 2AD$. Tính sin của góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{105}}{21}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. **D.** $1\sqrt{5}$.

Câu 40. Một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng là 30cm, chiều dài là 40cm, người ta gấp cạnh dài của hình chữ nhật thành bốn phần bằng nhau và dán lại để tạo thành một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc φ tạo bởi mặt chéo $(ABC'D')$ và $(ABCD)$.

A. $\varphi \approx 56°18'$. **B.** $\varphi \approx 36°52'$. **C.** $\varphi \approx 76°44'$. **D.** $\varphi \approx 71°33'$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

A. $90°$. **B.** $120°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SAC) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) tạo với nhau một góc $60°$.

A. a. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = x$. Hai điểm M và N thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt $CM = x$, $CN = y$. Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc $45°$.

A. $2a^2 + xy = 2a(x + y)$. **B.** $2a^2 + xy = a(x + y)$.

C. $a^2 + xy = 2a(x + y)$. **D.** $a^2 + xy = a(x + y)$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo của góc giữa hai mặt phẳng $(DA'B')$ và $(DC'B')$.

A. $90°$. **B.** $120°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. B	5. B	6. B	7. C	8. B	9. A	10.A	11.A	12.C	13.B
14.A	15.D	16.A	17.C	18.C	19.A	20.A	21.A	22.C	23.C	24.A	25.C	26.D
27.C	28.A	29.D	30.D	31.A	32.B	33.A	34.D	35.B	36.B	37.C	38.B	39.B
40.D	41.C	42.A	43.A	44.A	45.C							

§3. Khoảng cách

I. Tóm tắt lý thuyết

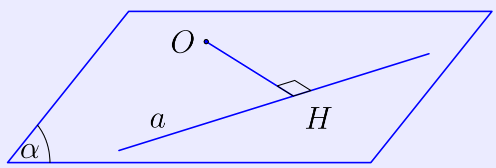
1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

A. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Định nghĩa 1

Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là khoảng cách từ O đến hình chiếu H của O trên a.

Kí hiệu: $d(O, a) = OH$.

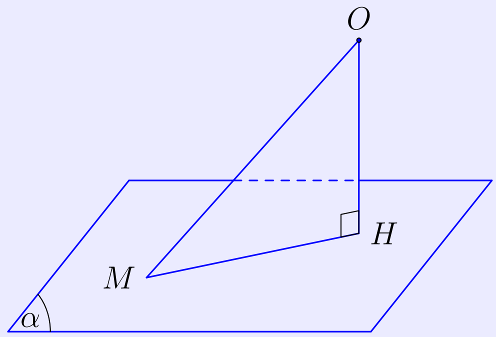


B. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định nghĩa 2

Cho điểm O và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu của O trên (α). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)*.

Kí hiệu: $d\left(O,(\alpha)\right) = OH$.

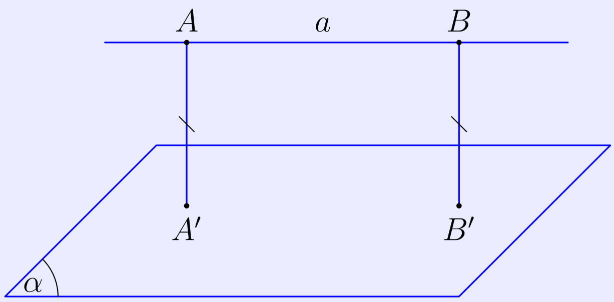


2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

A. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa 3

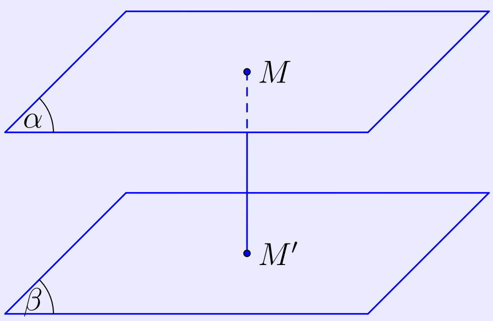
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu là $d\left(a,(\alpha)\right)$.



B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa 4

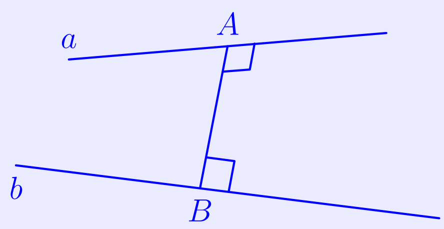
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.



3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

A. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Định nghĩa 5



AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và $b \Leftrightarrow \begin{cases} A \in a, B \in b \\ AB \perp a \\ AB \perp b \end{cases}$.

B. Khoảng cách

Định nghĩa 6

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài của đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

II. Các dạng toán

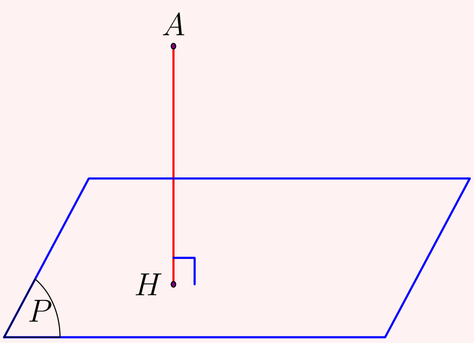
Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

✍ **CÁCH 1: TRỰC TIẾP**

✻ **Xác định** $d(A,(P))$**?**

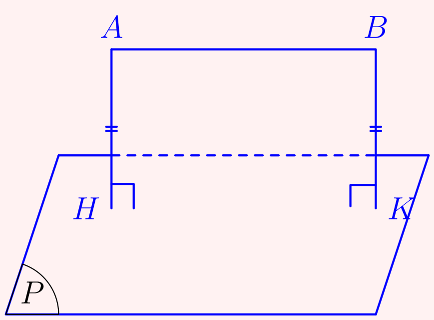
Ta tìm hình chiếu của A trên (P), nghĩa là tìm A ? $\perp (P)$.

Ta có: $AH \perp (P), H \in (P) \Rightarrow d(A,(P)) = AH$.

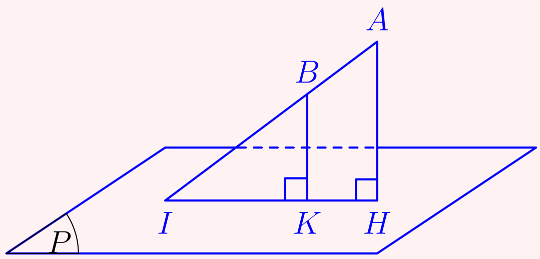


✍ **CÁCH 2: GIÁN TIẾP** ***(phương pháp đổi điểm)***

1. Nếu $AB \parallel (P)$ thì $d(A,(P)) = d(B,(O))$.



2. Nếu AB cắt (P) tại I thì $\dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)} = \dfrac{IA}{IB}$.



1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, $SA = a$.

a) Chứng minh: $SA \perp (ABC)$?

b) Tính $d\left(S,(ABC)\right) = ?$

c) Tính $d\left(C,(SAB)\right) = ?$

d) Tính $d\left(B,(SAC)\right) = ?$

e) Tính $d\left(A,(SBC)\right) = ?$

. . . .

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Dựng hai đoạn $BB' = a$, $CC' = 2a$ cùng vuông góc với (α) và ở cùng một bên đối với (α). Tính khoảng cách từ:

a) C' đến (ABB').

b) Trung điểm của $B'C$ đến (ACC').

c) B' đến (ABC').

d) Trung điểm của BC đến $(AB'C')$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB.

a) CMR: $(SAD) \perp (SAB)$.

b) Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $4a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD có $AH = a$. Biết $SH = a\sqrt{3}$.

a) CMR: $(SAD) \perp (SCD)$.

b) Tính góc giữa SB và $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$, ΔSBC vuông tại S. Cho $SH \perp (ABC)$ với SH là đường cao của ΔSBC. Biết $HB = 3a$.

a) CMR: $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Tính góc giữa SA và $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách từ H đến (SAB).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, SH vuông góc với đáy tại H là trung điểm của AB, tam giác SAB đều và $AB = a$.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) vuông góc với nhau.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).

c) Gọi M là trung điểm BC. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SD. CMR: tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCB).

(Trích đề tuyển sinh đại học khối D - 2007)

3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh $AB = a$. Từ trung điểm H của AB dựng $SH \perp (ABCD)$ với $SH = a$.

a) Tính Khoảng cách từ H đến (SCD), khoảng cách từ O đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

c) Gọi O là tâm hình vuông, tính khoảng cách từ O đến (SBC).

d) Tính khoảng cách từ trọng tâm của ΔSAB đến mặt phẳng (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBD). Suy ra khoảng cách từ trung điểm I của cạnh SC đến (SBD).

b) Gọi M là trung điểm của CD, tính khoảng cách từ A đến (SBM).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$; ΔABC vuông tại C với $AB = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a) Chứng minh $AH \perp BM$.

b) Đặt $AM = x$ $(0 \leq x \leq a\sqrt{3})$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

4. Bài tập trắc nghiệm

A. Câu hỏi lý thuyết, khoảng cách điểm đến mặt phẳng

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$. Gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$. **B.** $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

C. $d^2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$. **D.** $d = abc$.

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi d là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng chứa cạnh BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $d = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$. **B.** $d = \dfrac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2}$.

C. $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. **D.** $d = \dfrac{AB + AC}{AB.AC}$.

Câu 3. Cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (α). Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ M và N đến (α). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d_1 = d_2$. **B.** $d_1 = \dfrac{1}{2}d_2$. **C.** $d_1 = 2d_2$. **D.** $d_1 = d_2 = 0$.

Câu 4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên (α) và (β) sao cho đường thẳng MN không vuông góc với (α). Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\mathrm{d}(M, (\beta)) = \mathrm{d}(N, (\alpha))$. **B.** $\mathrm{d}(M, (\beta)) = \mathrm{d}((\alpha), (\beta))$.

C. $\mathrm{d}(N, (\alpha)) = \mathrm{d}((\alpha), (\beta))$. **D.** $\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) = MN$.

Câu 5. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau. Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho MN không vuông góc với Δ_1. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) < MN$. **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) > MN$.

C. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = MN$. **D.** $\mathrm{d}(M, \Delta_2) = \mathrm{d}(N, \Delta_1) = MN$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau, đường thẳng Δ_3 bất kì cắt Δ_1 tại M và cắt Δ_2 tại N. Khẳng định nào dưới đây luôn đúng?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) \leq MN$. **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) > MN$.
C. $\mathrm{d}(M, \Delta_2) = \mathrm{d}(N, \Delta_1)$. **D.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = MN$.

Câu 7. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau, mặt phẳng (β) chứa Δ_2 và song song với Δ_1, mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{d}(\Delta_1, (\beta))$. **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, (\beta)) = \mathrm{d}(\Delta_2, (\alpha))$.
C. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) < \mathrm{d}((\alpha), (\beta))$. **D.** $\mathrm{d}((\alpha), (\beta)) \leq MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$.

Câu 8. Cho đường thẳng Δ_1 và mặt phẳng (α) song song với nhau. Mặt phẳng (β) chứa Δ_1, vuông góc với (α) và cắt (α) theo giao tuyến là Δ_2. Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha))$. **B.** $\mathrm{d}(\Delta_1, \Delta_2) < \mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha))$.
C. $\mathrm{d}(M, \Delta_2) > \mathrm{d}(M, (\alpha)), \forall M \in \Delta_1$. **D.** $\mathrm{d}(\Delta_1, (\alpha)) = MN, \forall M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$.

Câu 9. Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α). Gọi d là khoảng cách từ Δ đến (α). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến (α).
B. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên (α) đến Δ.
C. d bằng khoảng cách từ mặt phẳng (β) đến (α) với (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α).
D. d bằng khoảng cách giữa Δ và hình chiếu vuông góc của Δ lên (α).

Câu 10. Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2. Gọi d là khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. d bằng độ dài đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2.
B. d bằng khoảng cách giữa Δ_1 và (β) với (β) là mặt phẳng chứa Δ_2 và song song với Δ_1.
C. d bằng khoảng cách giữa Δ_2 và (α) với (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và song song với Δ_2.
D. d bằng độ dài đoạn thẳng MM' với điểm M bất kì thuộc Δ_1 và M' là hình chiếu vuông góc của M lên Δ_2.

Câu 11. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Gọi d là khoảng cách giữa (α) và (β). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. d bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (α) đến (β).
B. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng bất kì nằm trong (β) đến (α).
C. d bằng khoảng cách giữa một đường thẳng Δ bất kì nằm trong (α) đến hình chiếu vuông góc của Δ lên (β).
D. d bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng bất kì Δ_1 và Δ_2 lần lượt nằm trong (α) và (β).

Câu 12. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi d là khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $d = DG$ với G là trọng tâm tam giác ABC.

B. $d = DH$ với H là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC).

C. $d = DI$ với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. $d = DN$ trong đó N là trung điểm đoạn AM với M là trung điểm đoạn BC.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = 4$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $d = \dfrac{12\sqrt{61}}{61}$. **B.** $d = \dfrac{144}{61}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{61}}{12}$. **D.** $d = \sqrt{61}$.

Câu 14. Khoảng cách lớn nhất giữa hai đỉnh của một hình lập phương cạnh a bằng bao nhiêu?

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 15. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng MN cắt (α) tại điểm I. Biết rằng $3\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MN}$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ M và N đến (α). Tính tỉ số $\dfrac{d_1}{d_2}$.

A. $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{d_1}{d_2} = 2$.

Câu 16. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng MN cắt (α) tại điểm I. Biết rằng $4\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM}$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ M và N đến (α). Tính tỉ số $\dfrac{d_1}{d_2}$.

A. $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{d_1}{d_2} = 4$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm CC' và d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $d = \mathrm{d}(B', (A'BC))$. **B.** $d = 2.\mathrm{d}(M, (A'BC))$.

C. $d = 3.\mathrm{d}(O, (A'BC))$. **D.** $d = \dfrac{1}{3}.\mathrm{d}(O, (A'BC))$.

Câu 18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

A. $d = \dfrac{abc}{\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}}$. **B.** $d = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

C. $d = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. **D.** $d = \dfrac{abc}{\sqrt{ab + bc + ac}}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = h$. Tính khoảng cách d từ A đến (SBC) theo a và h.

A. $d = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3h^2}}$. **B.** $d = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$. **C.** $d = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. **D.** $d = \dfrac{ah\sqrt{5}}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Tính khoảng cách d từ điểm G đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{4a\sqrt{21}}{63}$. **D.** $d = \dfrac{4a\sqrt{15}}{45}$.

Câu 21. Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tam giác SAC nội tiếp trong đường tròn có bán kính bằng 9. Gọi d là khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và $\mathbb{S}$ là diện tích tứ giác $ABCD$. Tính d khi biểu thức $P = d.\mathbb{S}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $d = 10$. **B.** $d = 12$. **C.** $d = 15$. **D.** $d = 17$.

B. Tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng CC' là

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$ là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{7}$, $AB = 3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{20}}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{10}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SC, đáy là hình chữ nhật. Goi H là trung điểm của SB. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là đoạn thẳng

A. AS. **B.** AB. **C.** AC. **D.** AH.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SC = 2a$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}, AD = a$. Gọi K là trung điểm của SA. Khoảng cách từ K đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SC = 2a$, đáy là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}, AD = a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao SC, đáy là hình chữ nhật. Goi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên cạnh AC và O là giao điểm hai đường chéo AC, BD. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) là đoạn thẳng

A. DC. **B.** DA. **C.** DH. **D.** DO.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi d và h lần lượt là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAD). Tỷ số $\frac{d}{h}$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 31. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{7}$, $AB = 3a$. Gọi O là tâm của đáy. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$. **B.** $a\sqrt{12}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Câu 32. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ B đến đường thẳng $A'C'$

A. $\frac{a\sqrt{19}}{2}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC' là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 34. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, giao điểm của AC và BD là O. Gọi khoảng cách từ điểm O và khoảng cách từ trung điểm I của AB đến mặt phẳng (SCD) lần lượt là d và h. Khi đó tỉ số $\frac{h}{d}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm O, có đường cao SA. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng SO, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Khoảng cách từ điểm B đến mặt (SAC) là đoạn thẳng BO.

B. Khoảng cách từ điểm A đến mặt (SCD) là đoạn thẳng AK.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt (SBD) là đoạn thẳng AH.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt (SBD) là đoạn thẳng AO.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ và $AD = AC = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD)

A. d=$\frac{12}{\sqrt{34}}$. **B.** $d = \frac{12}{34}$. **C.** $d = \frac{12}{5}$. **D.** $d = \frac{6}{\sqrt{7}}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ đường cao $SA = 2a$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = a$, đáy là hình chữ nhật có $AD = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBM).

A. $d = \frac{4a}{\sqrt{33}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{17}}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{17}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{33}}$.

Câu 39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{7}$, $AB = 3a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng SB bằng

A. $\frac{2a\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{8}{9}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = 3a$, $AB = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120°$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 41. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng CB'

A. $\dfrac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{19}}{5}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông ở A, $BC = 2a$, $\widehat{B} = 60°$. Gọi I là trung điểm của BC và cho $SA = SI = SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là

A. a. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

C. Khoảng cách đường thẳng và mặt phẳng song song, hai mặt phẳng song song

Câu 44. Trong các mệnh đề sau, đâu là mệnh đề đúng?

A. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc mặt phẳng (α) tới đường thẳng a .

B. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc đường thẳng a tới mặt phẳng (α).

C. Nếu hai đường thẳng a và b song song với mặt phẳng (α) khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (α) bằng khoảng cách từ đường thẳng b đến mặt phẳng (α) .

D. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (α) thì khoảng các từ đường thẳng a đến mặt phẳng (α) bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Câu 45. Trong các mệnh đề sau, đâu là mệnh đề **sai**?

A. Khoảng cách từ đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng a tới một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (α).

B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

C. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này tới một điểm bất kì thuộc mặt phẳng kia.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một đường thẳng bất kì nằm trong mặt phẳng này tới một đường thẳng bất kì nằm trong mặt phẳng kia.

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\mathrm{d}(A,(CDD'C')) = \mathrm{d}(B,(CDD'C'))$.
B. $\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = \mathrm{d}(B,(A'B'C'D'))$.
C. $\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = \mathrm{d}((ABB'A'),(CDC'D'))$.
D. $\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = \mathrm{d}((AC),(A'B'C'D'))$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD))$.
B. $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(D,(SAB))$.
C. $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD))$.
D. $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(BC,(SAD))$.

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\mathrm{d}(AB',(CDD'C'))$.

A. $\mathrm{d}(AB',(CDD'C')) = a$.
B. $\mathrm{d}(AB',(CDD'C')) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
C. $\mathrm{d}(AB',(CDD'C')) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
D. $\mathrm{d}(AB',(CDD'C')) = a\sqrt{2}$.

Câu 49. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\mathrm{d}((ABCD),(A'B'C'D')) = c$.
B. $\mathrm{d}((BB',(ACC'A')) = \dfrac{ab}{\sqrt{a+b^2}}$.
C. $\mathrm{d}((AB',(CDD'C')) = b$.
D. $\mathrm{d}(BB',(ACC'A')) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$. Tính khoảng cách h giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

A. $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
B. $h = \dfrac{a}{3}$.
C. $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
D. $h = a$.

Câu 51. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Gọi h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'C'B)$ và (ACD'). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $h^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
B. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.
C. $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.
D. $h = a + b + c$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Tính $\mathrm{d}(CD,(SAB))$.

A. $\mathrm{d}(CD,(SAB)) = a$.
B. $\mathrm{d}(CD,(SAB)) = a\sqrt{2}$.
C. $\mathrm{d}(CD,(SAB))) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
D. $\mathrm{d}(CD,(SAB)) = 2a$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính $\mathrm{d}(AB,(SCD))$.

A. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = a$.
B. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = a\sqrt{2}$.
C. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
D. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = 2a$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 3a$,$SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Tính khoảng cách $\mathrm{d}(AB,(SCD))$.

A. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = 5a$.
B. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = \dfrac{5a}{2}$.
C. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = a\sqrt{5}$.
D. $\mathrm{d}(AB,(SCD)) = 7a$.

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 120°$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính $\mathrm{d}(SA,(BMD))$.

A. $\mathrm{d}(SA,(BMD)) = a$. **B.** $\mathrm{d}(SA,(BMD)) = a\sqrt{3}$.

C. $\mathrm{d}(SA,(BMD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\mathrm{d}(SA,(BMD)) = a\sqrt{2}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$ và SC tạo với (ABC) một góc $45°$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAC. Tính $\mathrm{d}(G_1G_2,(SBC))$.

A. $\mathrm{d}(G_1G_2,(SBC)) = a\sqrt{5}$. **B.** $\mathrm{d}(G_1G_2,(SBC)) = \dfrac{4a}{3\sqrt{5}}$.

C. $\mathrm{d}(G_1G_2,(SBC)) = \dfrac{2a}{3\sqrt{5}}$. **D.** $\mathrm{d}(G_1G_2,(SBC)) = \dfrac{6a}{\sqrt{5}}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$,$AB' = 2a$ và đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính $\mathrm{d}(BC,(AB'C'))$.

A. $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = \dfrac{a}{2}$. **B.** $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = a\sqrt{3}$.

C. $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông canh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SD. Tính $\mathrm{d}(OM,(SAB))$.

A. $\mathrm{d}(OM,(SAB)) = \dfrac{a}{2}$. **B.** $\mathrm{d}(OM,(SAB)) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

C. $\mathrm{d}(OM,(SAB)) = \dfrac{a}{3}$. **D.** $\mathrm{d}(OM,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 59. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB = BC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$ và mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính $\mathrm{d}(BC,(AB'C'))$.

A. $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = a\sqrt{3}$. **B.** $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\mathrm{d}(BC,(AB'C')) = 2a\sqrt{3}$.

Câu 60. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120°$, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính $\mathrm{d}(B'D',(A'BD))$.

A. $\mathrm{d}(B'D',(A'BD)) = a\sqrt{15}$. **B.** $\mathrm{d}(B'D',(A'BD)) = \dfrac{a}{5}$.

C. $\mathrm{d}(B'D',(A'BD)) = a\sqrt{3}$. **D.** $\mathrm{d}(B'D',(A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính $\mathrm{d}(SB,(ACM))$.

A. $\mathrm{d}(SB,(ACM)) = \dfrac{a}{3}$. **B.** $\mathrm{d}(SB,(ACM)) = \dfrac{2a}{3}$.

C. $\mathrm{d}(SB,(ACM)) = a$. **D.** $\mathrm{d}(SB,(ACM)) = \dfrac{3a}{2}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính $\mathrm{d}(MD,(SBN))$.

A. $\mathrm{d}(MD,(SBN)) = \dfrac{a}{\sqrt{33}}$. **B.** $\mathrm{d}(MD,(SBN)) = \dfrac{2a}{\sqrt{33}}$.

C. $\mathrm{d}(MD,(SBN))=\dfrac{3a}{\sqrt{33}}$. **D.** $\mathrm{d}(MD,(SBN))=\dfrac{4a}{\sqrt{33}}$.

Câu 63. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A=A'B=A'C=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B$. Tính $\mathrm{d}(A'C,(AMN))$.

A. $\mathrm{d}(A'C,(AMN))=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\mathrm{d}(A'C,(AMN))=\dfrac{a}{11}$.

C. $\mathrm{d}(A'C,(AMN))=a\sqrt{22}$. **D.** $\mathrm{d}(A'C,(AMN))=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. Tỉ số khoảng cách từ hai điểm đến cùng một mặt phẳng

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Biết $SA=a\sqrt{3}$, $AD=a$ và SA vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2a$.

Câu 65. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** a.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{7}$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M là trung điểm của AC và G là trọng tâm tam giác SAC. Biết khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{18}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 68. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy. Biết cạnh đáy và đường cao bằng nhau và bằng a. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính theo a khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{39}$. **C.** $\dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác ABC đều cạnh a. Vẽ AI vuông góc với SB. Tính theo a khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt phẳng (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $AB = BC = CD = a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 30°. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 73. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính theo a khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45°. Lấy điểm M trên cạnh SA sao cho $AM = \dfrac{a}{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 75. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 76. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M là trọng tâm của tam giác ABD. Tính theo a khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a}{6}$.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trung điểm của SA. Tính theo a khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 78. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6$, $AD = 8$ và $AA' = \sqrt{5}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(B'IJ)$.

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** 5.

Câu 79. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30°. Hình chiếu vuông góc của A' xuống đáy (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính theo a khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{13}}{26}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** a.

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $ABCD$ là điểm H thuộc AB sao cho $HB = 3HA$. Góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng $45°$. Tính theo a khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC), với O là tâm của hình vuông $ABCD$.

A. $5a\sqrt{34}$. **B.** $\frac{5a\sqrt{34}}{17}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{34}}{34}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{17}}{2}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (CMN).

A. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{9a\sqrt{5}}{40}$. **C.** $\frac{9a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$. Mặt bên SAB vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SBD) và đáy bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** a.

ĐÁP ÁN

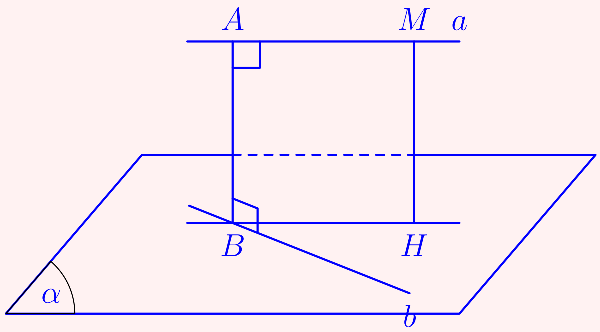
1. A	2. A	3. A	4. D	5. A	6. A	7. C	8. A	9. B	10.D	11.D	12.D	13.A
14.A	15.D	16.A	17.D	18.A	19.B	20.A	21.B	22.B	23.A	24.B	25.B	26.A
27.D	28.C	29.A	30.A	31.A	32.A	33.D	34.C	35.D	36.A	37.C	38.A	39.A
40.B	41.A	42.B	43.B	44.B	45.D	46.C	47.D	48.A	49.D	50.A	51.B	52.A
53.C	54.B	55.C	56.C	57.C	58.A	59.B	60.D	61.B	62.B	63.A	64.A	65.C
66.B	67.B	68.B	69.B	70.C	71.C	72.D	73.C	74.A	75.D	76.B	77.C	78.D
				79.B	80.C	81.B	82.D	83.A				

Dạng 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Ngoại trừ các trường hợp chúng ta có thể tìm được đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau ngay trên hình vẽ thì chúng ta sẽ làm theo cách sau đây:

Tìm một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia (có thể mặt phẳng này ta phải dựng thêm). Khi đó ta đã đưa khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng. Ta thường phải vận dụng thêm các kiến thức về khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.

- Dựng mặt phẳng (α) qua b và song song với a.
- Khi đó: $d(a,b) = d(a,(\alpha))$.
- Ta sẽ tính $d(a,(\alpha))$ thay vì tính $d(a,b)$ và bài toán đã trở nên đơn giản hơn.



1. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa

a) SC và BD.

b) AC và SD.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) vuông góc với $(ABCD)$ và SAD là tam giác đều. Gọi M là trung điểm AD.

a) Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa SM và BD.

c) Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B. Cho $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH là đường cao ΔSAB.

a) Tính góc giữa SC và (ABC); góc giữa (SAB) và (SAC).

b) Tính khoảng cách giữa SA và BC.

c) Tính khoảng cách giữa A và (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$ và $SH \perp (ABCD)$ với H là trung điểm của AD. Biết góc giữa SC và mặt đáy là $45°$.

a) Chứng minh $\widehat{SCH} = 45°$. Tính khoảng cách giữa S và $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa SH và BD.

c) Tính góc giữa (SAB) và $(ABCD)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là ABC là tam giác vuông tại A và SH vuông góc với mặt đáy tại trung điểm H của BC. Cho $AB = a$, $SB = BC = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ S đến (ABC) và tính góc của SA với (ABC).

b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $\widehat{SMH}$ là góc của (SAB) và (ABC). Tính số đo góc này.

c) Tính khoảng cách giữa SH và AB và tính khoảng cách từ H đến (SAB).

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và có trung tuyến SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh ΔSAB vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa SH và BD và tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho hình tứ diện $OABC$, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa

a) OA và BC.

b) AI và OC.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$, ΔABC vuông tại B với $BA = a$. Gọi M là trung điểm AB. Tính $d(SM, BC)$.

Bài 4. Cho hia tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc $60°$, nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với $BC = a$. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax.

a) Tính AD và $((C, (ABD))$.

b) Tính $d(AC, BD)$.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. I là trung điểm AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $IS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, SD, SB. Tính $d(NP, AC)$ và $d(MN, AP)$.

Bài 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, A'C', C'B'$. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng:

a) DE và AB'

b) $A'B$ và $B'C'$

c) DE và $A'F$.

Bài 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

c) Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a tâm O. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$; dựng $BK \perp SC$.

a) CMR: $SC \perp (DBK)$.

b) Tính $d\left(A, (SBC)\right)$; $d\left(A, (SDC)\right)$; $d\left(O, (SBC)\right)$.

c) Tính $d(BD, SC)$; $d(AD, BK)$.

4. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn thẳng nối một điểm trên đường thẳng này tới một điểm trên đường thẳng kia.

D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau luôn lớn hơn khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d = \dfrac{a}{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc, tam giác ABC cân và có $AC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $d = a\sqrt{2}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = 2a$.

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng độ dài của đoạn thẳng nào dưới đây.

A. AI. **B.** IJ. **C.** AB. **D.** AJ.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC.

A. $d = \dfrac{a}{4}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{2}$.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = a\sqrt{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a$ và $BC = a$. Tính $\mathrm{d}(SD, BC)$.

A. $\mathrm{d}(SD, BC) = \dfrac{2a}{3}$. **B.** $\mathrm{d}(SD, BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\mathrm{d}(SD, BC) = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $\mathrm{d}(SD, BC) = a\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SM và BC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $A'B'$ và $C'M$.

A. $d = 3a$. **B.** $d = 2a\sqrt{2}$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = 2a$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Câu 11. Cho tứ diện $OABC$, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và OC nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60°$. Biết $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB' và CC'.

A. $d = \dfrac{2a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $d = \dfrac{2a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{3a}{4}$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD' và BD.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{2a}{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AD.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $d = a$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$ và tất cả các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng nhau. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 18. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SM và CN.

A. $d = \dfrac{a}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a}{2}$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \dfrac{2a}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ$ và $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $d = a\sqrt{3}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{3}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a}{2}$. **D.** $d = a$.

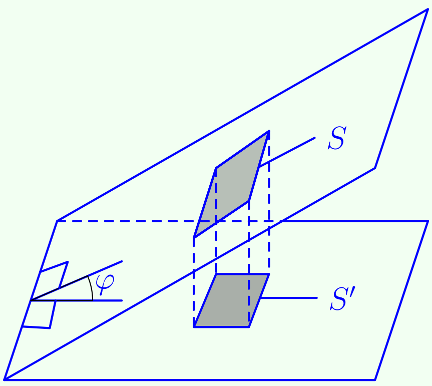
ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. B	5. B	6. A	7. D	8. A	9. B	10.A	11.B	12.A	13.B
14.D	15.B	16.C	17.D	18.A	19.B	20.A						

§4. Diện tích hình chiếu

I. Tóm tắt lý thuyết

Định lý 1



S: diện tích đa giác.

S': diện tích hình chiếu của đa giác.

φ: góc giữa mặt phẳng chứa đa giác và mặt phẳng chiếu.

$$S' = S.\cos\varphi$$

II. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}$, đáy $BC = 3a$; BC nằm trong mặt phẳng (α). Gọi A' là hình chiếu của A lên (α). Biết $\Delta A'BC$ vuông tại A'. Tính góc giữa (α) và (ABC).

Bài 2. Cho ΔABC đều cạnh a chứa trong mặt phẳng (α). Trên các đường thẳng vuông góc với (α) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên với (α).

a) Chứng minh ΔADE vuông. Tính diện tích ΔADE.

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (α).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên hợp với đáy góc φ. Gọi I là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

b) Chứng minh $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} = \dfrac{S_{SAB}}{\cos\varphi}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng (α). Trên đường thẳng vuông góc với (α) tại B, C vẽ $BD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}, CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng phía với mặt phẳng (α).

a) CMR: ΔADE vuông.

b) Tính diện tích tam giác ADE.

c) Tìm góc giữa (ADE) và (α).

Bài 5. Cho tam giác ABC có B, C là hình chiếu của E, F lên (β) sao cho tam giác ABF là tam giác đều cạnh a, $CF = a$, $BE = \dfrac{a}{2}$.

a) Gọi $I = BC \cap EF$. CMR: $AI \perp AC$.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

c) Tính góc giữa (ABC) và (β).

Bài 6. Cho tam giác ABC cân, đáy $BC = 3a$, $BC \perp (\beta)$, đường cao $a\sqrt{3}$. D là hình chiếu của A lên (β) sao cho tam giác DBC vuông tại D. Tìm góc giữa (ABC) và (β).

Bài 7. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Từ các đỉnh A, B, C vẽ các nửa đường thẳng vuông góc với mặt phăng chứa ABC. Lấy E, E, F nằm cùng phía đối với mặt phẳng chứa ABC sao cho $DA = a$, $BE = 2a$, $CF = x$.

a) Tìm x để tam giác DEF vuông tại D.

b) Với x vừa tìm được ở câu trên, tìm góc giữa (ABC) và (DEF).

§5. Ôn tập chương III

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O. Biết $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SB.

a) Chứng minh $MN \perp BC$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$ và tính góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa các mặt phẳng $(DCNM)$ và $(ABCD)$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và có tâm là O. SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và có tâm là O. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là một hình vuông tâm O và SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại trung điểm H của đoạn AO. Cho $SA = AB = a$.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Chứng minh $\widehat{SOA}$ là góc của hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính số đo góc này?

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông góc tại A và B, biết $BA = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của SA, SD.

a) Tính khoảng cách giữa AC và MN và tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa mặt phẳng $(DCNM)$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Kẻ đường cao SH của tam giác SAD. Chứng minh độ dài SH là khoảng cách giữa S và mặt phẳng $(DCNM)$. Tính khoảng cách này.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SH \perp (ABCD)$ với H là điểm trên đường chéo AC thỏa $AH = \dfrac{AC}{4}$. Biết $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ và tính khoảng cách giữa SH và BD.

b) Tính góc giữa SD và (SAC).

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của đoạn thẳng AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh $(BCM) \perp (SAB)$.

b) Tính tan góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (BCM).